Les fractions rationnelles

I. Le corps des fractions rationnelles

1°) Construction

Déf : On appelle fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ et en l'indéterminée X tout élément représenté par un rapport A/B formé par $A,B\in\mathbb{K}[X]$ avec $B\neq 0$. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble de ces éléments.

Déf : Deux fractions rationnelles A/B et C/D sont dites égales ssi $AD=BC$.

Déf : Tout polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ est dit égal à la fraction rationnelle $P/1\in\mathbb{K}(X)$. En ce sens $\mathbb{K}[X]\subset\mathbb{K}(X)$.

Déf : Soit $F=A/B$ et $G=C/D$ deux éléments de $\mathbb{K}(X)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

On définit les fractions rationnelles $\lambda.F, F+G, FG$ par : $\lambda.F=\dfrac{\lambda.A}{B}, F+G=\dfrac{AD+BC}{BD}, FG=\dfrac{AC}{BD}$.

Théorème :

$(\mathbb{K}(X),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathbb{K}(X),+,\times)$ est un corps.

2°) Représentant irréductible

Théorème : $\forall F\in\mathbb{K}(X),\exists!(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que :

(1) Q est unitaire

(2) $F=P/Q$.

(3) P et Q sont premiers entre eux.

La fraction P/Q est appelée représentant irréductible de F.

3°) Degré

Déf : Soit $F\in\mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible P/Q.

On appelle degré de F le nombre : $\deg F=\deg P-\deg Q\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$.

Prop : Soit $F=A/B\in\mathbb{K}(X)$. On a $\deg F=\deg A-\deg B$.

Prop : Soit $F,G\in\mathbb{K}(X)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

$\deg\lambda.F=\begin{cases}\deg F \text{ si } \lambda\neq 0\\ -\infty \text{ si } \lambda=0\end{cases}$, $\deg(F+G)\leq\max(\deg F,\deg G)$ et $\deg FG=\deg F+\deg G$.

4°) Dérivation

Déf : Soit $F\in\mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible P/Q.

On appelle fraction rationnelle dérivée de F la fraction $F'=\dfrac{P'Q-PQ'}{Q^2}$.

Prop : Soit $F=A/B\in\mathbb{K}(X)$. On a $F'=\dfrac{A'B-AB'}{B^2}$.

Prop : Soit $F,G\in\mathbb{K}(X)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. $(\lambda F)'=\lambda F', (F+G)'=F'+G', (FG)'=F'G+FG'$ et

lorsque $G\neq 0$: $\left(\dfrac{F}{G}\right)'=\dfrac{F'G-FG'}{G^2}$

Prop : Soit $F\in\mathbb{K}(X)$ tel que $F\neq 0$. On a $\deg F'\leq\deg F-1$.

5°) Racines et pôles d'une fraction rationnelle

Déf : Soit $F\in\mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible P/Q.

On appelle racine de F toute racine de P.

On appelle pôle de F toute racine de Q.

Déf : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible P/Q et $a \in \mathbb{K}$.
Si a est racine de F (resp. pôle de F), la multiplicité de a en tant que racine de P (resp. racine de Q) est appelée multiplicité de la racine a dans F (resp. du pôle a dans F).

Prop : Soit $F = A/B \in \mathbb{K}(X) - \{0\}$ et $a \in \mathbb{K}$.
Posons $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ les multiplicités de a en tant que racine de A, B.
Si $\alpha > \beta$ alors a est racine de F de multiplicité $\alpha - \beta$.
Si $\alpha = \beta$ alors a n'est ni racine, ni pôle de F.
Si $\alpha < \beta$ alors a est pôle de F de multiplicité $\beta - \alpha$.

6°) Evaluation

Déf : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible P/Q et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que F est définie en a ssi $Q(a) \neq 0$.
On pose alors $F(a) = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ appelée valeur de F en a.

Prop : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant A/B et $a \in \mathbb{K}$.
Si $B(a) \neq 0$ alors F est définie en a et $F(a) = A(a)/B(a)$

Prop : Soit $a \in \mathbb{K}, F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si F et G sont définies en a alors $\lambda F, F+G, FG$ et F' le sont aussi.

7°) Fonctions rationnelles

Déf : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On appelle ensemble de définition de F, l'ensemble $\mathcal{D}_F$ formé des $a \in \mathbb{K}$ tels que F définie en a.

Déf : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ P/Q et $\mathcal{D}$ une partie incluse dans $\mathcal{D}_F$.
On appelle fonction rationnelle associée à F définie sur $\mathcal{D}$ l'application $\tilde{F} : \begin{cases} \mathcal{D} \to K \\ a \mapsto \tilde{F}(a) = F(a) \end{cases}$.
Quand $\mathcal{D} = \mathcal{D}_F$, on parle simplement de fonction rationnelle associée à F.

Prop : Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{K}$.
Si $\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G$, $\tilde{F}(x) = \tilde{G}(x)$ alors $F = G$.

II. Décomposition en éléments simples

1°) Partie entière

Théorème :
$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists !(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que :
1) $F = E + G$,
2) $\deg G < 0$.
E est alors appelé partie entière de F, on la note $E = \text{Ent}(F)$.

2°) Partie polaire

Théorème :
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et a un pôle de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de F.
$\exists !(R, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que :
1) $F = G + \dfrac{R}{(X-a)^\alpha}$,
2) a n'est pas pôle de G,
3) $\deg R \leq \alpha - 1$.
La fraction $\dfrac{R}{(X-a)^\alpha}$ est appelée partie polaire de F en a.

Prop : (décomposition de la partie polaire)

Soit $a \in \mathbb{K}, \alpha \in \mathbb{N}^*$ et $R \in \mathbb{K}_{\alpha-1}[X]$.

$\exists!(\lambda_1,...,\lambda_\alpha) \in \mathbb{K}^\alpha$ tel que $\dfrac{R}{(X-a)^\alpha} = \dfrac{\lambda_\alpha}{(X-a)^\alpha} + \cdots + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dfrac{\lambda_1}{X-a}$.

3°) Décomposition en éléments simples dans C(X)

Théorème :

Toute fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ est égale à la somme de sa partie entière et de ses différentes parties polaires.

Cor : Pour $F \in \mathbb{C}(X)$ de représentant irréductible P/Q.

Si la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est : $Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \ldots (X-a_n)^{\alpha_n}$ avec $a_1,...,a_n$ deux à deux distincts.

Les pôles de F sont les a_i de multiplicité α_i et on peut écrire : $F = \text{Ent}(F) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \dfrac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j}$ avec $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$.

Cette écriture, qui est unique, est appelée décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

4°) Techniques de DES

a) démarche

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Pour former la DES de F :

- On exprime F sous forme irréductible P/Q.
- On détermine $\text{Ent}(F)$ en réalisant la division euclidienne de P par Q.
- On factorise Q dans $\mathbb{C}(X)$ de sorte de déterminer les pôles de F ainsi que leurs multiplicités.
- On exprime la DES de F à l'aide de coefficients inconnus : $a, b, c, d, ...$
- On détermine ces coefficients par diverses méthodes

b) détermination de la partie polaire relative à un pôle simple

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ de représentant irréductible P/Q et a un pôle simple de F. $Q = (X-a)\hat{Q}$ avec $\hat{Q}(a) \neq 0$.

La DES de F permet d'écrire : $F = \dfrac{P}{(X-a)\hat{Q}} = G + \dfrac{\lambda}{X-a}$ avec G n'ayant pas de pôle en a.

En multipliant par $X-a$ puis en évaluant en a on obtient $\lambda = \left(\dfrac{P}{\hat{Q}}\right)(a)$.

c) détermination de la partie polaire relative à un pôle double

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ de représentant irréductible P/Q et a un pôle double de F. $Q = (X-a)^2\hat{Q}$ avec $\hat{Q}(a) \neq 0$.

La DES de F permet d'écrire : $F = \dfrac{P}{(X-a)^2\hat{Q}} = G + \dfrac{\lambda}{(X-a)^2} + \dfrac{\mu}{X-a}$

En multipliant par $(X-a)^2$ puis en évaluant en a on obtient $\lambda = \left(\dfrac{P}{\hat{Q}}\right)(a)$.

En dérivant la relation précédente puis en évaluant en a : $\mu = \left(\dfrac{P}{\hat{Q}}\right)'(a)$.

d) démarche générale

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ de représentant irréductible P/Q et a un pôle de multiplicité α de F. $Q = (X-a)^\alpha\hat{Q}$ avec $\hat{Q}(a) \neq 0$. La DES de F est de la forme : $F = \dfrac{P}{(X-a)^\alpha\hat{Q}} = G + \dfrac{\lambda_\alpha}{(X-a)^\alpha} + \cdots + \dfrac{\lambda_1}{X-a}$.

avec G n'ayant pas de pôle en a.

En multipliant par $(X-a)^\alpha$ puis en évaluant en a : $\dfrac{P(a)}{\hat{Q}(a)} = 0 + \lambda_\alpha + 0$. Ainsi $\lambda_\alpha = \left(\dfrac{P}{\hat{Q}}\right)(a)$.

On reprend alors le processus avec $G = F - \dfrac{\lambda_\alpha}{(X-a)^\alpha}$ qui présente en a un pôle d'ordre $< \alpha$.

e) astuces de calculs

exploitation de la parité, évaluation en un point, multipliant le relation de DES par x et faire $x \to +\infty$.

III. Primitives de fonctions rationnelles

1°) Détermination de $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x-a}$ avec $a \in \mathbb{C}$

Soit $a \in \mathbb{C}$ déterminons $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x-a}$.

Si $a \in \mathbb{R}$ alors $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + C^{te}$.

Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors on peut écrire $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$.

$$\frac{1}{x-a} = \frac{x-\alpha+i\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + i\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

donne $\int \dfrac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln|x-a| + i\arctan\dfrac{x-\alpha}{\beta}$.

2°) Détermination de $\int \dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p^2 - 4q < 0$.

L'équation $x^2 + px + q = 0$ n'a pas de racines réelles.

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{\alpha}{2}(2x+p)+\lambda}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \lambda\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}$$

$\cdot \int \dfrac{2x+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \ln(x^2+px+q) + C^{te}$, reste à déterminer : $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}$

On écrit : $x^2 + px + q = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \dfrac{4q-p^2}{4} = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \delta^2$.

On réalise le changement de variable : $u = x + p/2$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\delta^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\delta^2} = \frac{1}{\delta}\arctan\frac{2x+p}{2\delta} + C^{te}$$

3°) Primitivation de fonctions rationnelles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, on veut déterminer $\int F(x)\mathrm{d}x$ sur les intervalles où $x \mapsto F(x)$ est définie.

- On écrit F sous forme irréductible.
- Si on peut écrire $F(x) = x^{n-1}G(x^n)$ avec $G \in \mathbb{C}(X)$ et $n \geq 2$ alors on réalise le changement de variable $t = x^n$ car $\int F(x)\mathrm{d}x = \int x^{n-1}G(x^n)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\int G(t)\mathrm{d}t$.
- On réalise la DES de F dans $\mathbb{C}(X)$.
- On primitive chacun des termes de la DES précédente.

IV. Primitivation se ramenant à des fonctions rationnelles

1°) Fonctions rationnelles en $e^{\alpha x}$ avec α non nul

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, on veut déterminer $\int F(e^{\alpha x})dx$ sur les intervalles où cela a un sens.

On réalise le changement de variable $u = e^{\alpha x}, du = \alpha u dx$: $\int F(e^{\alpha x})dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{F(u)du}{u}$.

2°) Fonctions rationnelles en cos *x* et sin *x*

On appelle polynôme réels en deux indéterminées X et Y toute expression de la forme

$P(X,Y) = \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{M} a_{p,q}X^pY^q$ avec $a_{p,q} \in \mathbb{R}$.

On note $\mathbb{R}[X,Y]$ l'ensemble de ces polynômes.

On appelle fraction rationnelle réelle en les indéterminées X et Y toute expression de la forme

$R(X,Y) = \frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$ avec $P,Q \in \mathbb{R}[X,Y], Q \neq 0$.

On note $\mathbb{R}(X,Y)$ l'ensemble de ces fractions.

Soit $R \in \mathbb{R}(X,Y)$, on veut déterminer $\int R(\cos x, \sin x)dx$ sur tout intervalle où $x \mapsto R(\sin x, \cos x)$ est définie.

On procède par changement de variable.

a) règles de Bioche

Théorème : (Règles de Bioche)

Notons $f(x) = R(\cos x, \sin x)$

Si $f(-x)d(-x) = f(x)dx$ alors on pose $t = \cos x$

Si $f(\pi - x)d(\pi - x) = f(x)dx$ alors on pose $t = \sin x$

Si $f(x + \pi)d(x + \pi) = f(x)dx$ alors on pose $t = \tan x$

Le changement de variable proposé transforme alors la détermination de $\int f(x)dx$ en la primitivation d'une fonction rationnelle en t.

b) méthode systématique

Lorsque les règles de Bioche échouent, on peut néanmoins réaliser le changement de variable : $t = \tan(x/2)$

pour lequel $dt = ... = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$.

Sachant $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ on a :

$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$ et on sait poursuivre la détermination.

3°) Fonctions rationnelles en ch *x* et sh *x*

Soit $R \in \mathbb{R}(X,Y)$, on veut déterminer $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)dx$ sur tout intervalle où $x \mapsto R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ est définie.

a) règles de Bioche

On remplace $\operatorname{ch} x$ par $\cos x$ et $\operatorname{sh} x$ par $\sin x$.

Si les règles de Bioche s'appliquent à la fonction formée et si celles-ci invitent au changement de variable $t = \cos x, \sin x$ ou $\tan x$ alors on effectue le changement de variable $t = \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ ou $\operatorname{th} x$.

b) méthode systématique

Si les règles de Bioche échouent, on écrit $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ sous forme exponentielle et on réalise le changement de variable : $t = e^x$.

4°) Fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $ad-bc \neq 0$.

Soit $R \in \mathbb{R}(X,Y)$, on veut déterminer $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ sur les intervalles où cela est possible.

On effectue le changement de variable : $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ en commençant par exprimer x en fonction de t.

$x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a}$, $\mathrm{d}x = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\mathrm{d}t$ puis $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}, t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\mathrm{d}t$.

En particulier : $c=0$ et $d=1$

On détermine $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$ via $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

5°) Fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac \neq 0$.

Soit $R \in \mathbb{R}(X,Y)$, on veut déterminer $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ sur tout intervalle où cela est possible.

On écrit ax^2+bx+c sous forme canonique : $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Par un changement de variable affine on peut alors transformer $\sqrt{ax^2+bx+c}$ sous l'une des formes $\sqrt{1-u^2}, \sqrt{u^2+1}$ ou $\sqrt{u^2-1}$ et on réalise alors les changements de variable respectifs :
$u = \sin t, u = \mathrm{sh}\, t, u = \pm \mathrm{ch}\, t$.